Laboration 3: Icke-linjär parameterestimering

Niclas Börlin

9 oktober 2000

1 Inledning

I denna laboration ska ni implementera Gauss-Newtons metod med linjesökning och använda den för att lösa ellipsproblemet.

2 Implementation

2.1 Linjesökning

Implementera en funktion som utför linjesökning från en punkt x_k längs en sökriktning p_k och använder Armijos villkor och backtracking med $\alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Förslag på lämpliga inparametrar:

- Namnet på residualfunktionen F.
- Nuvarande punkt x_k.
- Sökriktningen p_k.
- Nuvarande residual $F(x_k)^*$.
- Kortaste accepterade steglängd α_{min}. Nödvändig för att garantera terminering av steglängdsalgoritmen.
- Parameter(-rar) för att kunna kontrollera Armijos villkor.

Förslag på lämpliga returparametrar:

- Längsta accepterade steglängd α_k. Om ingen sådan finns $\geq \alpha_{\text{min}}$ skall $\alpha_k = 0$ returneras.
- Nästa punkt $x_{k+1}{}^*$.
- Funktionsvärdet i nästa punkt $f(x_{k+1})^*$.

*-märkta parametrar finns med för att undvika att upprepa beräkningar i onödan och kan uteslutas för att få en ”renare” implementation.

2.2 Gauss-Newtons metod

Implementera Gauss-Newtons metod för lösning av icke-linjär minsta-kvadratproblem utan bivillkor. Använd termineringsvillkoret $\|Jp\| \leq \epsilon \|F\|$).

Förslag till inparametrar:

- Namnet på residualfunktionen F och Jacobianen J. Tips! Om funktionerna ges systematiska namn, t ex `p1_f` (residualen), `p1_j` (jacobianen) behöver bara inledningen `'p1'` skickas.
- En startpunkt x_0.
- Maximalt antal tillåtna iterationer.
- Konvergenstoleransen ϵ.
- Parametrarna α_{min} och μ till steglängdsalgoritmen.

Förslag till utparametrar:

- Förslag till lösning x_*.
- Antal iterationer som krävdes.
- En kod som anger om metoden konvergerat, avbrutits ($\alpha \geq \alpha_{min}$ ej funnits) eller divergerat (maximalt antal iterationer förbrukats).
- En matris med samtliga x_i lagrade kolumnvis. Kan vara bra för att återskapa iterationssekvensen för analys.
- En vektor med steglängder. Också bra för att kunna analysera metoden.

2.3 Problemfunktioner

Implementera följande funktioner för ellipsproblemet:

- En funktion som genererar mätdata med simulerade normalfördelade fel givet en parametervektor $x = [c_x, c_y, a, b, \delta, \theta_i]$ och en standardavvikelse σ.
- En funktion som beräknar residualvektorn $F(x)$.
- En funktion som beräknar jacobianen $J(x)$.

Skicka simulerade mätpunkter som parametrar.

3 Uppgifter

3.1 Grunduppgift

Applicera Gauss-Newtons metod på ellipsproblemet. Använd $\epsilon = 10^{-3}$ och begränsa antalet iterationer till 100. Använd $\mu = 0.01, \alpha_{\text{min}} = 10^{-3}$ i steglängdsalgoritmen.

Använd sanna värden från tabellen nedan och verifiera att Gauss-Newton konvergerar mot $\hat{x}$ från rimligt stort område ($x_0 = x_* \pm 1\%$) då mätfelet $\sigma = 0$.

Gör experimentell störningsanalys för parametrarna c_x, c_y, a, b, δ för mätfelet $\sigma = 0.03, 0.06, 0.09$ och för sanna parametrar 1 och 2 nedan.

Fall	Sanna värden 1			Sanna värden 2	
	c_x, c_y, a, b, δ	θ_i	n	θ_i	n
1: Skymd	$154, -21, 18.91, 17.36, 4.4°$	$[20°, 250°]$	27	$[20°, 45°], [225°, 250°]$	15, 30
2: Toppkapad	$-137, -23, 19.00, 17.43, 3.3°$	$[5°, 245°]$	27	$[5°, 90°], [165°, 245°]$	27, 100
3: Suddig topp	$-137, -23, 19.00, 17.43, 3.3°$	$[5°, 245°]$	27	$[5°, 90°], [165°, 245°], [90°, 165°]$	27, 100
4: Metallbackning	$225, -49, 48.88, 40.44, 1.4°$	$[195°, 425°]$	27	$[225°, 400°]$	27, 100, 200

I fall 3, sanna värden 2, ska mätpunkterna i tredje θ-intervallet ha 5 ggr så stort mätfel som de övriga.