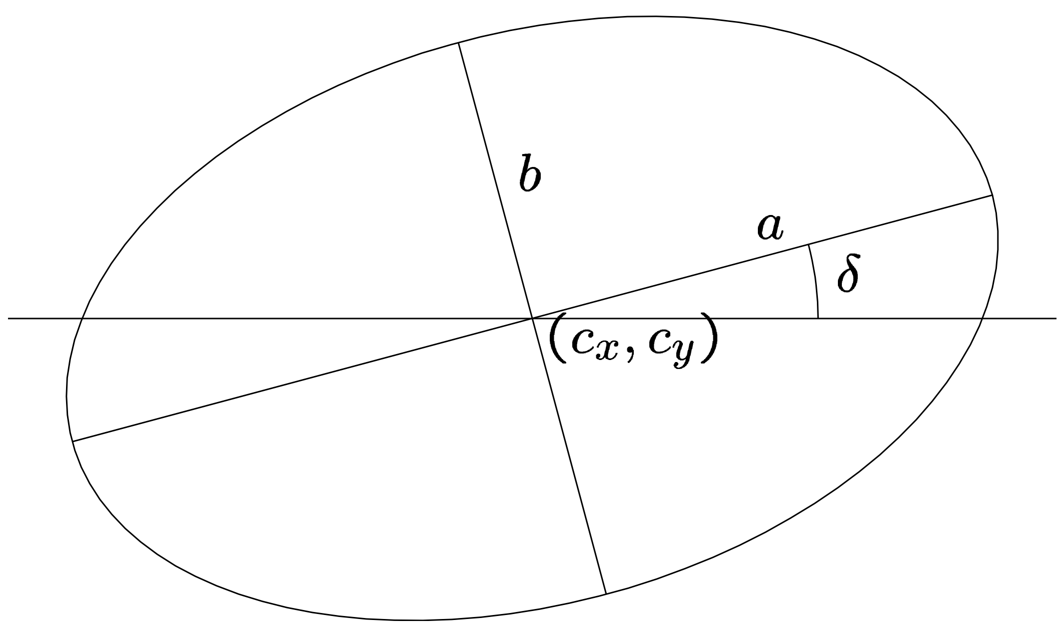
Ellipsproblemet

Steg 1: Formulera problemet

För en punkt på en ellips med centrumpunkt (c_x, c_y), storaxel a, lillaxel b och lutning δ gäller:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{bmatrix}$$

för något värde på “fasvinkeln” θ.



Ellipsproblemet

Steg 2: Formulera en modellfunktion

Lägg alla modellparametrar i en vektor x och konstruera en modellfunktion $g(x)$

$$x = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ a \\ b \\ \delta \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix}, \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{bmatrix},$$

där $g_i(x)$ motsvarar en punkt på ellipsen

$$g_i(x) = \begin{bmatrix} g_{ix} \\ g_{iy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_x + a \cos\delta \cos\theta_i - b \sin\delta \sin\theta_i \\ c_y + a \sin\delta \cos\theta_i + b \cos\delta \sin\theta_i \end{bmatrix}$$

och m är antalet punkter.

Ellipsproblemet

Steg 3: Formulera en objektfunktion

Formulera residualfunktionen $F(x)$ som “modell minus data”

$$F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}, \quad f_i(x) = g_i(x) - \tilde{p}_i,$$

där $\tilde{p}_i, i = 1, \ldots, m$ är “mätpunkter” som vår modell ska anpassas till.

Formulera minsta-kvadrat-objektfunktionen $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x).$$

Steg 4: Härled jacobianen till residualfunktionen

Jacobianen $J(x)$ blir

$$J(x) = \begin{bmatrix} J_{11}(x) & J_{12}(x) & J_{13}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{m1}(x) & J_{m2}(x) & J_{m3}(x) \end{bmatrix},$$

där

$$\begin{aligned}
J_{i1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{ix}}{\partial c_x} & \frac{\partial f_{ix}}{\partial c_y} \\ \frac{\partial f_{iy}}{\partial c_x} & \frac{\partial f_{iy}}{\partial c_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
J_{i2} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{ix}}{\partial a} & \frac{\partial f_{ix}}{\partial b} & \frac{\partial f_{ix}}{\partial \delta} \\ \frac{\partial f_{iy}}{\partial a} & \frac{\partial f_{iy}}{\partial b} & \frac{\partial f_{iy}}{\partial \delta} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\theta_i & -\sin\delta\sin\theta_i & -a\sin\delta\cos\theta_i - b\cos\delta\sin\theta_i \\ \sin\delta\cos\theta_i & \cos\delta\sin\theta_i & a\cos\delta\cos\theta_i - b\sin\delta\sin\theta_i \end{bmatrix}, \\
J_{i3} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{ix}}{\partial \theta_1} \cdots \frac{\partial f_{ix}}{\partial \theta_{i-1}} & \frac{\partial f_{ix}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial f_{ix}}{\partial \theta_{i+1}} \cdots \frac{\partial f_{ix}}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial f_{iy}}{\partial \theta_1} \cdots \frac{\partial f_{iy}}{\partial \theta_{i-1}} & \frac{\partial f_{iy}}{\partial \theta_i} & \frac{\partial f_{iy}}{\partial \theta_{i+1}} \cdots \frac{\partial f_{iy}}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0...0 & -a\cos\delta\sin\theta_i - b\sin\delta\cos\theta_i & 0...0 \\ 0...0 & -a\sin\delta\sin\theta_i + b\cos\delta\cos\theta_i & 0...0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$