

Interpolation



**Modellfunktioner som satisfierar
givna punkter**

Några tillämpningar

- **Animering**
 - rörelser, t.ex. i tecknad film
- **Bilder**
 - färger
 - *resizing*
- **Grafik**
- **Diskret representation -> kontinuerlig**

Interpolation



- **Vi känner $f(t)$ i n punkter**

$$y_i = f(t_i) \quad i = 1, \dots, n$$

- **Vi söker en funktion $P(t)$ så att**

$$P(t_i) = y_i$$

- **$P(t)$ *interpolerar* f i punkterna t_i**
- **P kan vara polynom, trigonometriska funktioner...**

Basfunktioner

En interpolerande funktion väljs som linjärkomb. av

basfunktioner $\Phi_1(t) \dots \Phi_n(t)$

$f(t) = \sum_{j=1}^n x_j \Phi_j(t)$ x_j är de param. som ska bestämmas

Att kräva att f interpolerar (t_i, y_i) $i = 1 \dots n$ betyder att

$$f(t_i) = \sum_{j=1}^n x_j \Phi_j(t_i) = y_i$$

vilket ger ett system av linjära ekvationer

$$Ax = y$$

$$a_{ij} = \Phi_j(t_i)$$

Elementen i A ges av

Kvadratisk system

- **Genom att välja antalet basfunktioner = antalet mätpunkter får vi ett kvadratisk system så att punkterna satisfieras exakt**
- **Valet av basfunktioner påverkar konditionen hos $Ax = y$**

Definitioner



- En interpolerande funktion används för att uppskatta värdet av f i en punkt t .
- Om t tillhör det intervall som bildas av $t_1 \dots t_n$ görs en *interpolation*
- Ligger t utanför intervallet görs en *extrapolation*
- Att arbeta med polynom är fördelaktigt eftersom de är enkla att derivera och integrera

Polynominterpolation

- **Enklast och vanligast att välja ett polynom som interpolerande funktion**
- **Till n punkter (t_i, y_i) finns ett entydigt bestämt polynom av grad $\leq n-1$**
- **Polynomet kan representeras och evalueras på olika sätt, men alla måste ge samma matematiska funktion**

Basfunktionerna för polynom

$$\Phi_j(t) = t^{j-1} \quad j = 1 \dots n$$

$$\Phi_1(t) = 1$$

$$\Phi_2(t) = t$$

$$\Phi_3(t) = t^2$$

$$\Phi_n(t) = t^{n-1}$$

$$P(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_{n-1} t^{n-1}$$

Koefficienterna c_i

...bestäms av det linj. ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Vandermonde-matris, ofta illakonditionerad

Exempel

- Bestäm det andragradspolynom som interpolerar

- Ansats : $P(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2$

ger ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 90 & 8100 \\ 1 & 100 & 10000 \\ 1 & 110 & 12100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 1.12 \\ 1.30 \end{pmatrix}$$

t	f
90	0.96
100	1.12
110	1.30

$$\mathbf{c} = [0.42 \ -0.003 \ 0.0001]^T \text{ ger}$$

- Illakond. problem : $\kappa(\mathbf{A}) = 2 \cdot 10^6$

$$P(t) = 0.42 - 0.003t + 0.0001t^2$$

Om man lägger till en punkt måste hela systemet lösas på nytt.

Newton's allmänna interpolationsformel

- Ansätt $P_{n-1}(t)$ som ett interpolationspol. av grad $\leq n-1$

$$P_{n-1}(t) = c_0 + c_1(t - t_1) + c_2(t - t_1)(t - t_2) + \\ + \dots + c_{n-1}(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_{n-1})$$

- $P(t_i) = f_i$, $i=1,2,\dots, n$ måste gälla
insättning av (t_i, f_i) ger

$$c_0 = f_1$$

$$c_0 + c_1(t_2 - t_1) = f_2$$

$$c_0 + c_1(t_3 - t_1) + c_2(t_3 - t_1)(t_3 - t_2) = f_3$$

...

...i exemplet ...

t	f
90	0.96
100	1.12
110	1.30

$$P_2(t) = c_0 + c_1(t - 90) + c_2(t - 90)(t - 100)$$

ger ekvationerna

Ger nollorna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 1 & 20 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ 1.12 \\ 1.30 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{A}) = 2 \cdot 10^2$$

- **Den nya formuleringen ger**

$$\mathbf{c} = [0.96 \ 0.016 \ 0.0001]^T$$

$$\begin{aligned} P_2(t) &= 0.96 + 0.016(t - 90) + 0.0001(t - 90)(t - 100) = \\ &= 0.42 - 0.003t + 0.0001t^2 \end{aligned}$$

- **Endast en ekvation behöver lösas om ytterligare en punkt läggs till**

koeficienterna

$$c_0 = f_1$$

$$c_1 = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}$$

$$c_2 = \frac{f_3 - f_1 - \frac{(t_3 - t_1)}{(t_2 - t_1)}(f_2 - f_1)}{(t_3 - t_1)(t_2 - t_1)}$$

...och allt mer komplicerat (för!)

Dividerade differenser

$$f[x_i] = f(x_i)$$

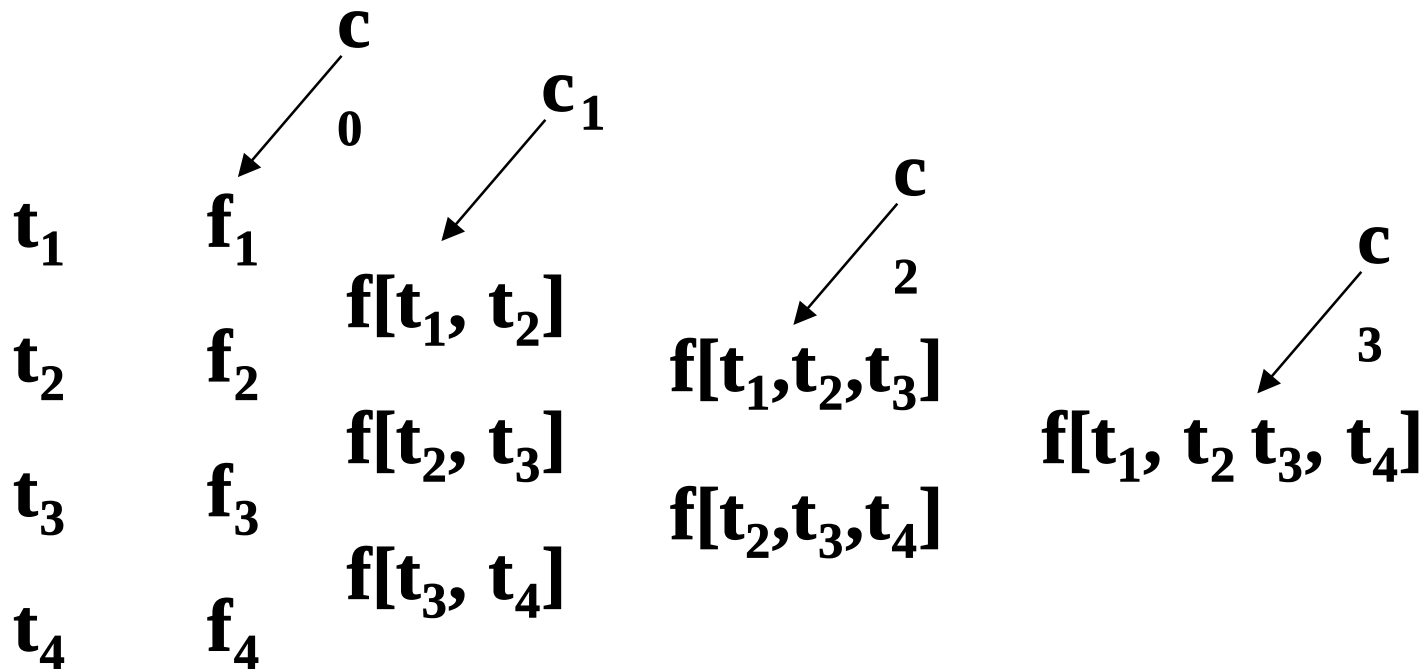
$$f[x_i, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_i, \dots, x_{i+n-1}] - f[x_i, \dots, x_{i+n-2}]}{x_{i+n} - x_{i+n-2}}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1}$$

Bättre sätt att beräkna c_i



R_T kan uppskattas med första försummade
term ty $f[t_1, t_2, \dots, t_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$

Nytt eksempel

t	f
20	0.36379
21	0.36406
22	0.36434
23	0.36461
24	0.36488

t	f	f[,]	f[,,]
21	0.36406	0.00028/1	
22	0.36434		-0.00001/2
23	0.36461	0.00027/1	0.00001/6
24	0.36488	0.00027/1	

0/2=0

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= c_0 + c_1(t-t_1) + c_2(t-t_1)(t-t_2) + c_3(t-t_1)(t-t_2)(t-t_3)= \\
 &= 0.36406 + 0.00028(t-21) - 0.000005(t-21)(t-22) + \\
 &\quad + 0.00001/6(t-21)(t-22)(t-23)
 \end{aligned}$$

Hur stort blir modellfelet?

Sats : Låt f vara en funktion med n kontinuerliga derivator inom det intervall som bildas av punkterna $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Om P är det entydigt bestämda polynom av grad $\leq n-1$ som uppfyller $P(t_i) = f(t_i)$ $i = 1, \dots, n$

Då gäller att

$$f(t) - P(t) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_n) \quad \text{för något } \xi \text{ inom}$$

det intervall som bildas av $t_1, t_2, \dots, t_n$.

Så $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ kan alltså skattas med nästa koefficient

Polynom av grad n-1 som interpolerar (t_i, f_i) $i=1, \dots, n$

$$P_{n-1}(t) = c_0 + c_1(t - t_1) + c_2(t - t_1)(t - t_2) + \dots + c_{n-1}(t - t_1) \dots (t - t_{n-1})$$

R_{XX} : Felet i interpolationspunkten $(t \pm \Delta t)$ ger upphov till fel i approximationen av $f(t)$

R_{XF} : Fel i de angivna funktionsvärden följer med till ber. av c_i och därmed till P

R_B : Avrundningsfel i beräkningarna

R_T : Approximation med polynom = ”modellfel”

Se särskilt häfte om felen

Trunkeringsfelet R_T

- **Newtons allmänna interpolationspolynom**
 - **trunkeringsfelet uppskattas med första försummade termen**
- **Felet i interpolationspunkterna är noll**
- **Observera Runges fenomen**
 - ↳ **lågt gradtal vid polynominterpolation**

Fig. 5(8)

Fortplantade fel R_{XX} & R_{XF}

När polynomet evalueras följer fel i indata med genom beräkningen och fortplantar sig till det evaluerade värdet

$$P_{n-1}(t) = c_0 + c_1(t - t_1) + c_2(t - t_1)(t - t_2) + \dots + c_{n-1}(t - t_1)\dots(t - t_{n-1})$$

Felet i $P(t)$ beräknas med hjälp av maximalfelsuppsk.

$$|\Delta P| \leq \left| \frac{\partial P}{\partial c_0} \Delta c_0 \right| + \left| \frac{\partial P}{\partial c_1} \Delta c_1 \right| + \dots + \left| \frac{\partial P}{\partial c_{n-1}} \Delta c_{n-1} \right| + \left| \frac{\partial P}{\partial t} \Delta t \right|$$

Hur stort är felet i c_i ?

När koefficienterna beräknas följer ev. fel i indata (funktionsvärdena) med genom beräkningarna.

Låt felet i f följa samma beräkning som f

t_1	ε_1	$\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{t_2 - t_1}$	Felen adderas!!
t_2	ε_2	$\frac{\varepsilon_3 + \varepsilon_2}{t_3 - t_2}$	
t_3	ε_3	$\frac{\varepsilon_4 + \varepsilon_3}{t_4 - t_3}$	O.s.v.
t_4	ε_4		

Annotations in the diagram:

- Δc_0 points to the first fraction.
- Δc points to the second fraction.
- A curved arrow connects Δc_0 to Δc .
- The number 1 is placed below the second fraction.

Avrundningsfelet R_B

Normalt litet i förhållande till övriga fel.

**Tänk dock på att en ev. avrundning av den slutliga approximationen måste adderas till övriga fel.
(Presentationsavrundningen)**

Linjär interpolation

- **f approximeras med rätlinje genom (t_1, f_1) och (t_2, f_2) :**

$$P(t) = f_1 + \frac{(f_2 - f_1)}{(t_2 - t_1)} \cdot (t - t_1)$$

Det gamla exemplet

Approximera $f(97)$ med linjär interpolation

t	90	100	110	120
f	0.96	1.12	1.30	1.51

Sedan tidigare vet vi att $c = [0.96 \ 0.016 \ 0.0001]^T$ med
polynomet $P(t) = 0.96 + 0.016(t-90)$

Formeln ger

$$P(97) = 0.96 + \frac{(1.12 - 0.96)}{(100 - 90)} \cdot (97 - 90) = 1.072$$

$= 0.016$

Trunkeringsfel - linjär interpolation



- om f interpoleras linjärt genom (t_1, f_1) och (t_2, f_2) , $t_1 \leq t \leq t_2 = t_1 + h$ kan trunkeringsfelet uppskattas med

$$|R_T| \leq \frac{h^2}{8} \cdot \max |f''(t)| \quad \boxed{\text{Härledning s.5(15)}}$$

- Om man inte känner funktionen f , hur skattar man $f''(t)$?
Approximera f med interpolationspolynom av en grad högre och derivera detta. (Lägg till en term)

i vårt exempel...

- $P(t) = 0.96 + 0.016(t-90)$ ($P(97) = 1.072$)
 $Q(t) = P(t) + 0.0001(t-90)(t-100)$
- $Q''(t) = 0.0002$, $h=t_2 - t_1 = 10$

$$|R_T| \approx \frac{10^2}{8} \cdot 0.0002 = 0.0025$$

Värdena kommer från

$$f(t) = 0.25e^{0.015t}$$

$$f(97) = 1.07112 \quad \text{så felet} \approx 0.0009$$

Hygglig feluppskattning

R_{xx} vid linjär interpolation

felet i punkten som interpoleras, t , fortplantas i beräkningen av $P(t)$

- mv-satsen ger att detta begränsas enligt

$$|\Delta f| \leq |f'(t) \cdot \Delta t|$$

eftersom f inte är känd, skattas f' med $P'(t) = c_1$

$$\rightarrow |R_{xx}| < |c_1 \cdot \Delta t|$$

R_{XF} vid linjär interpolation

**felet i de givna funktionsvärdena, f ,
fortplantas i beräkningen av $P(t)$**

- **Detta fel kan skattas med**

$$|R_{XF}| \leq \varepsilon \quad \text{där } |f_i| \leq \varepsilon$$

Se s.5(7)

R_B vid linjär interpolation

- R_B avrundningsfelen i beräkningarna är normalt litet i jämförelse med övriga fel (i MATLAB 10^{-16})

f_i korrekt avr. $\Delta f_i = 0.5E-5$

$a = 21.4 \pm 0.05$

Bestäm $f(a)$ med $|\Delta f| \leq 0.3E-4$

t	f
20	0.36379
21	0.36406
22	0.36434
23	0.36461
24	0.36488

Exempel

Vi provar linjär interpolation :

$P_1(t) = c_0 + c_1 \cdot (t - t_1)$ för (21, 0.36406) och (22, 0.36434)

$P_1(t_i) = f_i$ ger $c_0 + c_1 \cdot (21 - 21) = 0.36406$ (c_0 fås direkt)

$$c_0 + c_1 \cdot (22 - 21) = 0.36434$$

$c_0 = 0.36406$ och $c_1 = 0.00028$

...exempel...



$$P_1(t) = 0.36406 + 0.00028 \cdot (t - 21)$$

$$P_1(21.4) = 0.36406 + 0.00028 \cdot (t - 21) = 0.364172$$

$R_B = 0$ här, alla räkningar exakta

$|R_{XF}| \leq 0.5E-5$ ty alla f_i korrekt avrundade

$$|R_{XX}| < |c_1 \cdot \Delta t| = 0.28E-3 \cdot 0.5E-1 = 0.14E-4$$

så återstår

$$|R_T| \leq \frac{h^2}{8} \max |f''(t)|, \quad h = t_2 - t_1 \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$h = t_2 - t_1 = 22 - 21 = 1$$

↪ skatta $f''(t)$ med ett andragradspolynom
ta nästa punkt (23, 0.36461) och ansätt

$$P_2(t) = P_1(t) + c_2(t-t_1)(t-t_2)$$

$$P_1(23) + c_2(23-21)(23-22) = f_3$$

$$\Rightarrow 0.36462 + 2c_2 = 0.36461$$

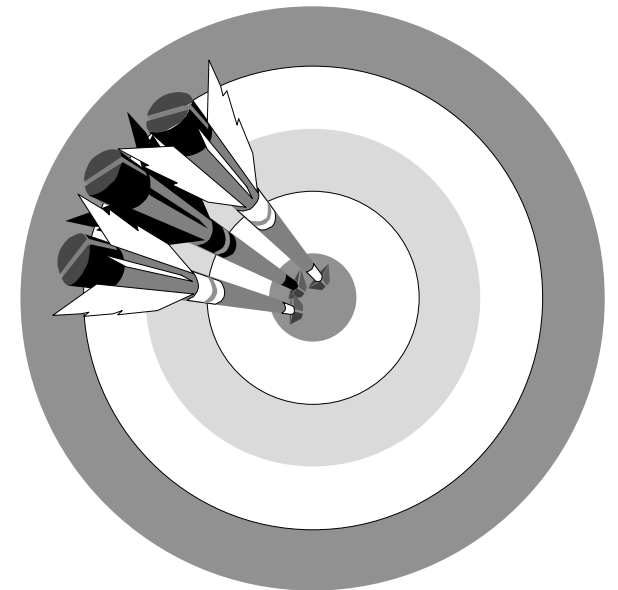
$$c_2 = -0.5E-5 \Rightarrow P_2'' = 2 \cdot c_2 = -E-5$$

$$|R_T| \leq \frac{h^2}{8} E-5 = 0.125E-5$$

Det totala felet

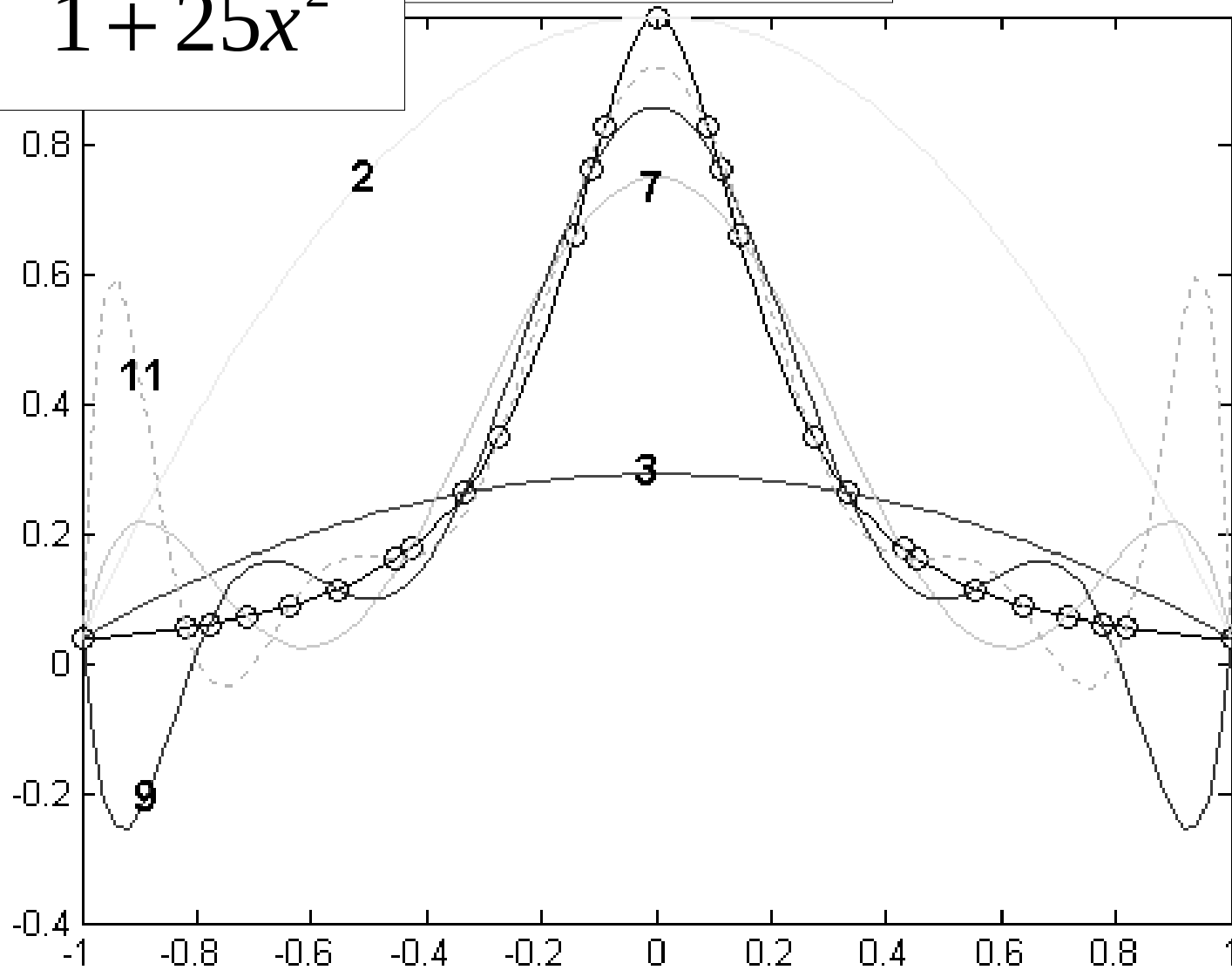
$$\begin{aligned} |\mathbf{R}_{\text{TOT}}| &\leq |\mathbf{R}_{\text{XX}}| + |\mathbf{R}_{\text{XF}}| + |\mathbf{R}_{\text{T}}| + |\mathbf{R}_{\text{B}}| = \\ &= 1.4\text{E-5} + 0.5\text{E-5} + 0.125\text{E-5} + 0 = \\ &= 2.025\text{E-5} \leq 2.1\text{E-5} \end{aligned}$$

Linjär interpolation duger alltså!



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Runges funktion

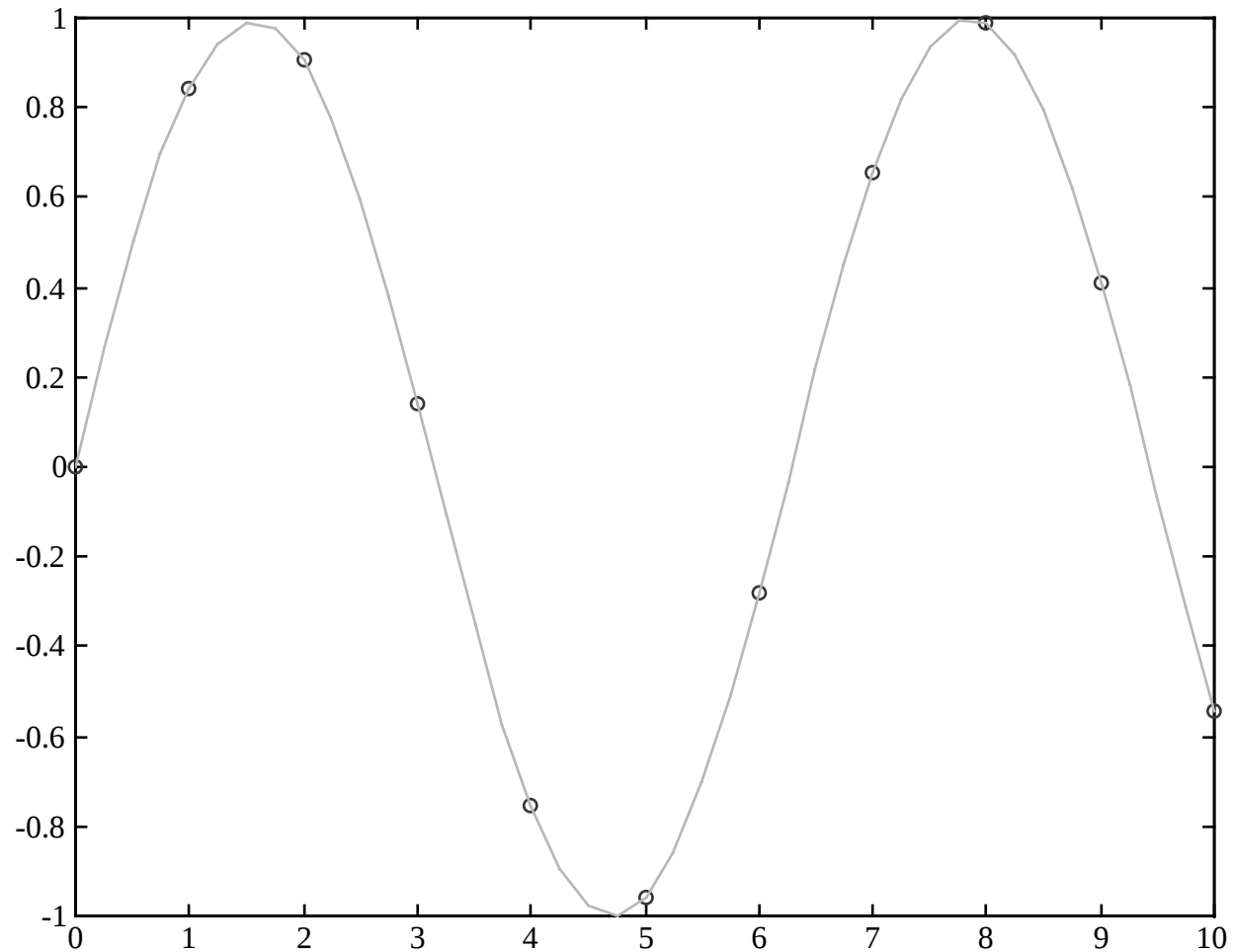


Styckvis polynominterpolation

- Att anpassa ett enda polynom till ett stort antal punkter ger mest troligt upphov till oscillering
- Istället interpolerar man med polynom av lägre grad på mindre intervall
- Linjär interpolation - rät linje mellan varje par av succ. punkter. Den totala interpolerande funktionen har då disk. derivata i alla inre punkter
- Man kan välja polynom så att den sammansatta funktionen är kontinuerligt deriverbar

Kubiska splines

```
x = 0:10; y =  
sin(x);  
xi = 0:.25:10;  
yi = spline(x,y,xi);  
plot(x,y,'o',xi,yi)
```



Skiftning/skalning



- För att förbättra kan man använda en annan upps. basfunktioner, som ger samma polynom men annan representation

$$\Phi_j(t) = \left(\frac{t-c}{d} \right)^{j-1}$$

där $c = (t_1 + t_n)/2$ och $d = (t_n - t_1)/2$

c innebär en skiftning och d en skalning $\Rightarrow$ de nya ober. variablerna ligger i intervallet $[-1, 1]$

t	f
90	0.96
100	1.12
110	1.30

exemplet igen

$$\left. \begin{array}{l} c = 100 \text{ och } d = 10 \\ \Phi_j(t) = \left(\frac{t-100}{10} \right)^{j-1} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$

$$\Phi_1(t) = 1$$

$$\Phi_2(t) = \frac{t-100}{10}$$

$$\Phi_3(t) = \left(\frac{t-100}{10} \right)^2$$

$$P(t) = c_0 + c_1 \frac{t-100}{10} + c_2 \left(\frac{t-100}{10} \right)^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(A) = 3.2255$$

Lagrange interpolation

$$\begin{aligned} P(t) = & \frac{(t - t_2)(t - t_3)}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} y_1 \\ & + \frac{(t - t_1)(t - t_3)}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} y_2 \\ & + \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} y_3 \end{aligned}$$

Polynomet framför

y_1

blir = 0 för $t = t_2$ & t_3

och = 1 för $t = t_1$

Valet av $\Phi_j(t)$ medför att $A = I$ och alltså $x=y$