

# Numerisk Analys?

---

**“Studiet av avrundningsfel”**

**“Studiet av siffermässiga metoder för att lösa matematiska problem”** Bonniers lilla uppslagsbok

**“Studiet av algoritmer för den kontinuerliga matematikens problem”** Lloyd N. Trefethen

**“Metoder för att organisera och analysera beräkningar”**

# Approximationer



- ⌘ **Val av modell**
  - idealiseringar
- ⌘ **Fel i indata**
  - mätvärden med begränsad noggrannhet
- ⌘ **Avrundningsfel (beräkningsfel)**
  - ändlig aritmetik
- ⌘ **Trunkationsfel (beräkningsfel)**
  - en oändlig process ersätts med en ändlig
- ⌘ **Presentationsfel**

**Jordens yta beräknas med**

$$A = 4\pi r^2$$

**Approximationer :**

- **modelleras som en sfär**
- **radiens värde är resultat av mätningar och tidigare beräkningar**
- **värdet för  $\pi$  är en oändlig process som måste trunkeras**
- **värden och resultat i beräkningarna avrundas**

# Konditionen hos ett problem

---

**“Ett problem sägs vara  
illakonditionerat/störningskänsligt om en  
liten störning i indata kan ge upphov till en  
stor störning i utdata.  
Annars sägs problemet vara välkonditionerat”**

# Illa-konditionerade problem

---

$$\begin{bmatrix} 1000 & 1001 \\ 1001 & 1002 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2001 \\ 2003 \end{bmatrix}$$

**A**

**b**

**har lösningen**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# stör högerledet

---

$$\begin{bmatrix} 1000 & 1001 \\ 1001 & 1002 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 2003 \end{bmatrix}$$

har lösningen

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1003 \\ -1000 \end{bmatrix}$$

# i MATLAB

```
»A=[1000 1001;1001 1002]
```

```
A =
```

```
      1000      1001  
      1001      1002
```

```
»b1=[2001 2003]'
```

```
b1 =
```

```
      2001  
      2003
```

```
»b2 =b1; b2(1)=2000
```

```
b2 =
```

```
      2000  
      2003
```

```
»A\b1
```

```
ans =
```

```
      1.0000  
      1.0000
```

```
»A\b2
```

```
ans =
```

```
      1.0e+03  
*  
      1.0030  
     -1.0000
```

# Grundbegrepp

⌘ **Närmevärde**

$\bar{a}$  närmevärde till det exakta värdet  $a$

⌘ **Absolut fel i  $\bar{a}$ :  $\Delta a = \bar{a} - a$**

⌘ **Relativt fel i  $\bar{a}$ :  $\Delta a/a$ , ( $a \neq 0$ )**

$$a = \sqrt{2}, \bar{a} = 1.414$$

$$\Delta a = a - \bar{a} = -2.1356\text{E-}4,$$

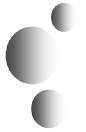
$$|\Delta a| \leq 2.2\text{E-}4$$

$$|\Delta a/a| \leq 2\text{E-}4$$



# Korrekta decimaler - signifikanta siffror

---



⌘ om  $|\Delta a| \leq 0.5 \cdot 10^{-t}$  sägs närmevärdet ha  
t korrekta decimaler

⌘ alla siffror i positioner med enhet  $\geq 10^{-t}$  sägs vara  
signifikanta

⌘ Ekvivalenta uttryck :

$$\bar{a} = 1.414 \quad |\Delta a| \leq 0.22E-3$$

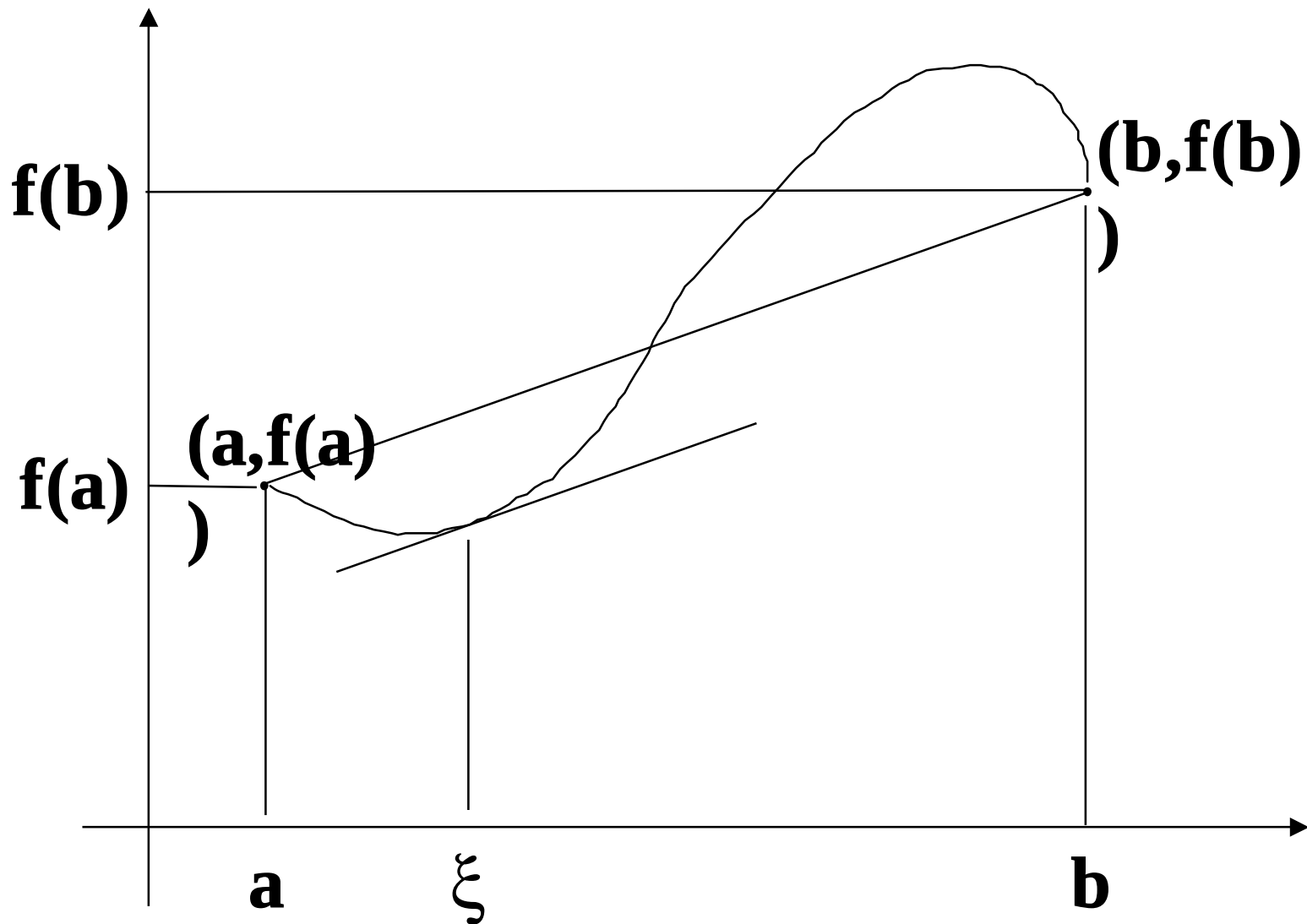
$$a = 1.414 \pm 0.22E-3$$

$$1.41378 \leq a \leq 1.41422$$

*3 korrekta decimaler*

*4 signifikanta siffror*

# Medelvärdessatsen geometriskt



# Differentialkalkylens mv-sats

Låt  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$

- $f$  är kontinuerlig i  $[a,b]$
- $f$  är deriverbar i  $]a,b[$

Då finns minst en punkt  $\xi$  i  $]a,b[$  där tangenten till funktionskurvan är parallell med kordan mellan ändpunkterna

Derivatan  $f'(\xi)$  i punkten  $\xi$  uppfyller alltså

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} \quad , \text{dvs } f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi)$$

# Fortplantning av fel

---

- ⌘ metoder för att analysera hur fel i indata fortplantas i beräkningar
- ⌘ Differentialkalkylens medelvärdessats :

**Om funktionen  $f$  är deriverbar så finns en punkt  $\xi$  mellan  $a$  och  $b$  sådan att**  
 **$\Delta f = f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$**

# I praktiken

⌘ använd derivatan i närmevärdet x

$$|\Delta f| \leq f'(x) \cdot \Delta x$$

Exempel:  $f(a) = \sqrt{a}$ , då  $a = 2.05 \pm 0.01$

$$\Delta f = f'(\xi) \Delta a = 1/(2 \cdot \sqrt{\xi}) \cdot \Delta a$$

$$|\Delta f| \leq \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2.05}} \cdot |\Delta a| \leq \frac{0.01}{2 \cdot \sqrt{2.05}} \leq 0.0036$$

$$\sqrt{2.05} \approx 1.43178210632764$$

# De fyra räknesätten

---

- ⌘ Oftast känner man bara gränser för de absoluta felen

**Triangelolikheten används**

$$y = x_1 + x_2 \quad \text{närmevärdet } \bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

$$\Delta y = \bar{y} - y = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - (x_1 + x_2) = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$|\Delta y| = |\Delta x_1 + \Delta x_2| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

# Felfortplantning i flera variabler

---

⌘ Generalisering till flera variabler

**Allmänna felfortplantningsformeln :**

$$\Delta f \approx \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k$$

**Maximalfelsuppskattningen :**

$$|\Delta f| \cong \sum_1^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \Delta x_k \right|$$

$$f(x, y) = x^2 y e^{xy}$$

## Exempel

**Uppskatta  $|\Delta f|$  då  $x=1.000 \pm 0.0005$  och  $y=2.000 \pm 0.001$**

⌘ **Derivera f**

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = (2xy + x^2 y^2) e^{xy} \\ f'_y(x, y) = (x^2 + x^3 y) e^{xy} \end{cases}$$

⌘ **Sätt in värdena i maximalsuppskattningen**

$$|\Delta f| \leq |(2xy + x^2 y^2) e^{xy}| \cdot |\Delta x| + |(x^2 + x^3 y) e^{xy}| \cdot |\Delta y| \lesssim$$

$$\lesssim 59.12 \cdot 0.0005 + 22.17 \cdot 0.001 \leq 0.052$$

0.02956

0.02217



# Funktionsberäkningar

---

- ⌘ **matematikens elementära funktioner**
- ⌘ **inte ovanligt med serieutvecklingar av de elementära funktionerna**
  - **approximerar seriens summa med en partialsumma**
  - **resttermen, trunkeringsfelet, måste uppskattas**

# Taylorutveckling

---

**Vanligt att approximera funktioner kring  
en viss punkt a**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

# Taylorutveckling.....

---

⌘ **Gör substitutionen**

**$h=x-a$  (avståndet till den punkt vi känner)**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a) \cdot h^k}{k!} = \\ &= f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a) \cdot h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(a) \cdot h^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

# Approximation av oändliga serier

---

- ⌘ Taylorutvecklingen oändlig
- ⌘ Summan skattas med partialsumma
- ⌘ Kvar blir trunkeringsfelet  $R_T$   
måste skattas - resttermsuppskattning

# Resttermsuppskattning

⌘ Söker en övre gräns för den del av summan som inte tas med  $|R_T|$

Låt  $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  vara en konvergent serie

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \quad R_T = S - S_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$$

# I - Alternierende serie

---

- ⌘ **Beloppet av termerna  $\rightarrow 0$**  (följer av att serien är konvergent)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

- ⌘ **Summorna  $S_N, S_{N+2}, S_{N+4} \dots$  är en monoton talföljd som är begränsad** ( $\Leftrightarrow$  serien är konvergent)

- ⌘ **Resttermen kan skattas med första försummade term**

$$|R_T| \leq |a_{N+1}|$$

## II - Skattning med integral

---

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{med } a_n \geq 0 \quad \text{kan skrivas}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad \text{där } f(x) \text{ är positiv och monotont}$$

**avtagande.**

⌘ **utnyttja att summan begränsas av integralen**

$$R_T = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{\infty} f(x) dx = F(N)$$

# III - Jämförelse med känd serie

---

**Antag**  $0 \leq a_n \leq b_n, \quad n \geq N+1$

**och att**  $T = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n$  **är känd. Då gäller**

$$R_T = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n = T$$



## Några kända serier

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \text{ för } x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x), \text{ för } x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x), \text{ för } x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a) \cdot h^2}{2!} + \frac{f'''(a) \cdot h^3}{3!} + \dots$$

**Exempel**

**Beräkna  $\cos(x)$  i  $[3\pi/4, 5\pi/4]$  med 3 korr. decimaler**

**Hur många termer i Taylorutv. måste tas med ?**

⌘ **Utveckla kring  $\pi$**

$$\begin{aligned} \cos(\pi + h) &= \cos(\pi) + \cos'(\pi) \cdot h + \frac{\cos''(\pi) \cdot h^2}{2!} + \frac{\cos'''(\pi) \cdot h^3}{3!} + \dots = \\ &= -1 + (-\sin(\pi)) \cdot h - \frac{\cos(\pi) \cdot h^2}{2!} + \frac{\sin(\pi) \cdot h^3}{3!} + \frac{\cos(\pi) \cdot h^4}{4!} + \dots = \\ &= -1 - \frac{-1 \cdot h^2}{2!} + \frac{-1 \cdot h^4}{4!} + \dots = -1 + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

**En alternerande serie**

**...exempel...**

---

- ⌘ **Vi vill alltså ha  $|R_T| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$**
- ⌘ **Första försummade term har formen**

$$|a_N| \leq \left| \frac{h^N}{N!} \right| \leq \left| \frac{(\pi/4)^N}{N!} \right| \leq 0.5 \cdot 10^{-3} \quad , \quad \mathbf{N \text{ jämn}}$$

**N=5 ger 0.00249039457019**

**N=6 ger  $0.3259918869273900 \cdot 10^{-3} \Rightarrow N \geq 6$  duger**

## Använd approximationen

## ...exempel

$$\cos(\pi + h) \approx -1 + \frac{h^2}{2!} - \frac{h^4}{4!}$$

### MATLAB

```
format short e
h= (-1/4*pi:0.05*pi:1/4*pi)';

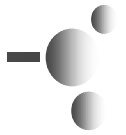
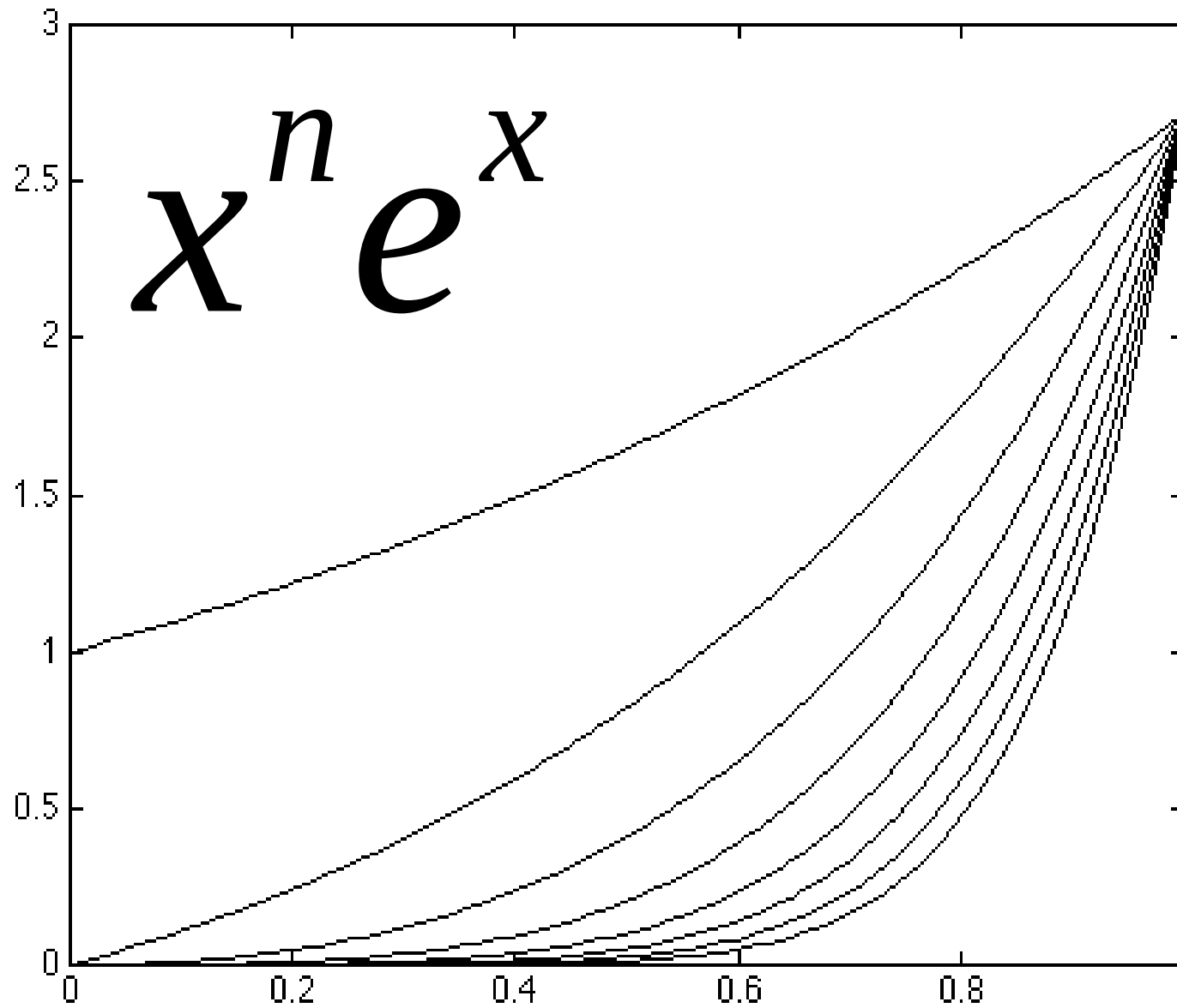
% med tre termer
T3 = -1 + (h.^2)./2 - (h.^4)./factorial(4);

% med två termer
T2 = -1 + (h.^2)./2;

disp(' h          Fel i T2          Fel i T3')
disp([h T2-cos(pi+h) T3-cos(pi+h)])
```

# Felet i approximationen :

| h            | Fel i T2    | Fel i T3     |
|--------------|-------------|--------------|
| -7.8540e-001 | 1.5532e-002 | -3.2243e-004 |
| -6.2832e-001 | 6.4091e-003 | -8.4857e-005 |
| -4.7124e-001 | 2.0396e-003 | -1.5149e-005 |
| -3.1416e-001 | 4.0454e-004 | -1.3329e-006 |
| -1.5708e-001 | 2.5346e-005 | -2.0854e-008 |
| 0            | 0           | 0            |
| 1.5708e-001  | 2.5346e-005 | -2.0854e-008 |
| 3.1416e-001  | 4.0454e-004 | -1.3329e-006 |
| 4.7124e-001  | 2.0396e-003 | -1.5149e-005 |
| 6.2832e-001  | 6.4091e-003 | -8.4857e-005 |
| 7.8540e-001  | 1.5532e-002 | -3.2243e-004 |



**Beräkna**  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n = 0 \dots 100$

**Matematisk kan detta göras med partiell**

**integration**

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} e^x dx =$$

$$= \frac{e}{n+1} - \frac{1}{n+1} I_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad I_{n+1} = e - (n+1) I_n$$

## exempel ...

---

**Enkelt att beräkna  $I_0$**

$$I_0 = e - 1 = 1.71828...$$

**Rekursionsformeln**

$$I_{n+1} = e - (n+1) \cdot I_n$$

**ger enkelt**

$$I_1 = e - I_0 = e - (e - 1) = 1$$

$$I_2 = e - 2 \cdot I_1 = 2.71828... - 2 \cdot 1 = 0.71828...$$

...



# MATLAB - körning

| n   | I <sub>n</sub> |
|-----|----------------|
| 1   | 1.0000         |
| 2   | 0.7183         |
| 3   | 0.5634         |
| 4   | 0.4645         |
| 5   | 0.3956         |
| ... |                |
| 16  | 0.1503         |
| 17  | 0.1624         |
| 18  | -0.2043        |
| 19  | 6.5991         |
| 20  | -129.2637      |

```
I(1) = 1;  
e=exp(1);  
for n=1:99  
    I(n+1) = e - (n+1)*I(n);  
end % for
```

|     |                            |
|-----|----------------------------|
| ... |                            |
| 98  | -0.501344442411.0e+138     |
| 99  | 0.49633099798881.0e+140    |
| 100 | -0.4963309979888091.0e+142 |

# Matematiskt...

---

**då  $0 < x < 1$  gäller  $x^n > x^{n+1}$  för alla  $n \geq 0$**

**därför måste  $I_0 > I_1 > I_2 > \dots > I_{100}$**

**och alla  $I_n > 0$**

# Fel introduceras

---

**Relativa noggrannheten  $10^{-16}$**

$$I_2 = 0.71828... \pm 10^{-16}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= e - 3 \cdot I_2 = e - 3 \cdot (0.71828... \pm 10^{-16}) \pm 10^{-16} = \\ &= 0.5634... \pm 4 \cdot 10^{-16} \end{aligned}$$

- ⌘ **ny avrundning tillfogas**
- ⌘ **tidigare fel multipliceras med 3**

# rekursionsformeln baklänges

| n   | $I_n$  |
|-----|--------|
| 110 | 0.5000 |
| 109 | 0.0202 |
| 108 | 0.0248 |
| 107 | 0.0249 |
| ... |        |
| 100 | 0.0267 |
| 99  | 0.0269 |
| 98  | 0.0272 |
| ... |        |
| 20  | 0.1238 |
| 19  | 0.1297 |
| 18  | 0.1362 |
| 17  | 0.1434 |
| ... |        |
| 3   | 0.5634 |
| 2   | 0.7183 |
| 1   | 1.0000 |

Avrundat till 4 dec.

$$I_n = \frac{e - I_{n+1}}{n+1}$$

$$0 < I_{110} < I_1 = 1 \quad \text{så} \quad I_{110} = 0.5 \pm 0.5$$

```

I(110) = 0.5;
e=exp(1);
for n=109:-1:1
    I(n) = (e - I(n+1))/(n+1);
end % for
    
```

# Vad händer med felet nu?

---

Insättning av  $I_{110} = 0.5 \pm 0.5$  ger

$$I_{109} = \frac{e^{-0.5 \pm 0.5}}{110} \pm 10^{-16} = 0.0202 \pm 0.00454$$

$$I_{108} = \frac{e^{-0.0202 \pm 0.00454}}{109} \pm 10^{-16} = 0.0202 \pm 0.00454$$

⌘  $10^{-16}$  övre gräns för avrundningsfelet vid division

$$\text{⌘ } (\text{fel i } I_n) = \frac{1}{n+1} (\text{fel i } I_{n+1}) \pm 10^{-16}$$

## i MATLAB...

| n   | $I_n$  | fel i $I_n$ |
|-----|--------|-------------|
| 110 | 0.5    | 0.5         |
| 109 | 0.0201 | 4.55e-03    |
| 108 | 0.0248 | 4.17e-05    |
| 107 | 0.0249 | 3.86e-07    |
| 100 | 0.0267 | 1.01e-16    |
| 99  | 0.0269 | 1.01e-16    |
| 98  | 0.0272 | 1.01e-16    |
| 20  | 0.1239 | 1.04e-16    |
| 19  | 0.1298 | 1.05e-16    |
| 18  | 0.1363 | 1.05e-16    |
| 17  | 0.1435 | 1.05e-16    |
| 3   | 0.5634 | 1.30e-16    |
| 2   | 0.7183 | 1.44e-16    |
| 1   | 1.0000 | 1.72e-16    |

**Denna beräkning sägs  
vara stabil**

**“de gamla  
avrundningsfelen  
växer inte”**

## ⌘ Klassiska referenser :

**Wilkinson - 1963, 1965)**

**Flyttalsaritmetik & avrundningsfelsanalys**

## ⌘ Standard

**Förslag till IEEE-standard 1981,1984**

## ⌘ Alg. för att evaluera av elementära funktioner i IEEE-aritmetik -89, -90, -91

## ⌘ Svårt att implementera korrekt & snabbt

**1994 - fel i Intels Pentium chip (FPDIV) 4 sign.dec**

**Windows 3.1 -  $\text{fl}(2.01 - 2.00) = 0.0$**

# Talrepresentation

- ⌘ Flyttal lagras normaliserade i tre delar, tecken, mantissa och exponent

$$\boxed{-} \boxed{.34265} \cdot 10^{\boxed{-2}}$$

## Normaliserat

- mantissan  $m$   $.1 \leq m < 1$  (för basen 10)



# Lagring av flyttal

---

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{d}_0 + \frac{\mathbf{d}_1}{\beta} + \frac{\mathbf{d}_2}{\beta^2} + \dots + \frac{\mathbf{d}_{t-1}}{\beta^{t-1}} \right) \beta^e$$

**Relativa felet**  $\frac{|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \leq \epsilon_{\text{mach}}$

**där  $\epsilon_{\text{mach}}$  kallas avrundningsenheten**

$$\epsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \beta^{1-t}$$

# Rundningsregler



- ⌘ **avkorta**
- ⌘ **avrundning till närmaste jämna**

## Vancouver-exemplet

- **jan -82 börs-index satt till 1000**
- **nov -83 bottennotering 520**
- ▮▮▮▮ **index noterades med tre dec. och avhuggning**
- ▮▮▮▮ **räkningar med avrundning nästan dubblade index**

# Ett exempel

## ⌘ Närmevärdena

$$\mathbf{x}_1 = 10.123455 \pm 0.5 \cdot 10^{-6} \quad \mathbf{x}_2 = 10.123789 \pm 0.5 \cdot 10^{-6}$$

- 6 korr. decimaler, 8 sign. siffror och ett relativt fel  $< 10^{-7}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = (\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2) \pm (\Delta \mathbf{x}_1 + \Delta \mathbf{x}_2) = -0.000334 \pm 10^{-6}$$

$$\Delta \mathbf{y} \leq 0.5 \cdot 10^{-5} \quad 5 \text{ korrekta decimaler, 2 sign. siffror}$$

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{y}}{\mathbf{y}} \right| \leq \frac{10^{-6}}{0.000334} < 3 \cdot 10^{-3} = 0.3 \cdot 10^{-2}$$


## ⌘ Relativa felet ett mått på informationsmängden i närmevärdet

- ⌘ **Noggrannhetsförlust vid subtraktion**
  - två nästan lika stora tal

**Gör en matematiskt ekvivalent omskrivning**

# Omskrivningar

⌘ **Andragradsekvationer enkelt exempel**

⌘ **Kvadratkomplettering**

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = \frac{2x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

⌘  $\log b - \log a = \log \frac{b}{a}$

⌘ **Taylorutveckling, t.ex. för små värden på x**

$$1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$$